

Funksiya hosilasining ta'rif

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning atrofida aniqlangan bo'lsin. Bu nuqtadagi argument va funksiya orttirmalari mos ravishda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ bo'lishi ma'lumdir.

10.1.1-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida aniqlangan bo'lib, shu nuqtadagi funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi ($\Delta x \rightarrow 0$) chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limit *funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi* deyiladi va y' , $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ lardan biri bilan belgilanadi.

Bu o'rinda y' va $\frac{dy}{dx}$ belgilashlar argument qiymati ahamiyatsiz bo'lganda, $f'(x_0)$ va $\frac{df(x_0)}{dx}$ lar esa argument qiymatini bilish zarur bo'lgan hollarda ishlatilishi qulay ekanligini aytamiz.

Ta'rif bo'yicha $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ yozuv o'rinlidir.

1-misol. $y=x^2$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish.

- 1) $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$;
- 2) $\Delta y = f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) = (2x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$;
- 3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;
- 4) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 \Rightarrow y' = 2x_0$

Agar x_0 ixtiyoriy ekanligidan uni x bilan almashtirilsa, $(x^2)' = 2x$ ni olamiz.

Bu misoldan ko'rinadiki, funksiya hosilasini uning ta'rifiga ko'ra topish to'rt bosqichdan (qadamdan) iborat bo'lib, birinchi bosqichda argumentga orttirma berilar, ikkinchi bosqichda funksiya orttirilmasi, uchinchi bosqichda funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati va nihoyat, to'rtinchi bosqichda bu nisbatning argument orttirmasi nolga intilgandagi limiti topilar ekan.

2-misol. $y=\sin x$ ning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \cdot \cos x$$

Demak, $(\sin x)' = \cos x$ o'rinli ekan. Bu yerda 1-ajoyib limitdan va $\cos x$ uzluksiz funksiya ekanligidan foydalandik.

10.1.2-ta’rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning qandaydir o‘ng (chap) yaqin atrofida aniqlangan bo‘lib, $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ chekli limit mavjud bo‘lsa, uni funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng (chap) hosilasi deyiladi va $f'(x_0 + 0)$ ($f'(x_0 - 0)$) kabi belgilanadi.

Agar $f'(x_0)$ chekli hosila mavjud bo‘lsa, o‘ng va chap hosilalar mavjud va

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \quad (10.1.1)$$

bo‘lishini ko‘rsatish oson. Buning aksinchasi ham o‘rinlidir, ya’ni $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$ bo‘lsa, $f'(x_0)$ mavjud bo‘lib, (10.1.1) o‘rinli bo‘ladi.

1-eslatma. $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f'(x)$ - funksiya hosilasining x_0 nuqtadagi bir tomonli (o‘ng yoki chap) limiti va bir tomonli (o‘ng yoki chap) hosila aynan tushunchalar emasligini keyinroq ko‘ramiz.

2-eslatma. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida aniqlangan va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty (-\infty)$ bo‘lsa, funksiya x_0 nuqtada $+\infty (-\infty)$ hosilaga ega deb qabul qilinadi va uni *cheksiz hosila* deb yuritiladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo‘lsa, uni shu nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi. *Funksiya hosilasini topish jarayoni uni differensiallash deb yuritiladi.* Quyidagi teorema o‘rinlidir.

10.1.1- teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu nuqtada uzluksizdir.

Isbot. Teorema shartiga ko‘ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

chekli limit mavjuddir. U holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$$

o‘rinli bo‘lib, bu yerda $\Delta x \rightarrow 0$ da α cheksiz kichik miqdordir, ya’ni $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$. Bundan

$$\Delta y = (y' + \alpha) \Delta x \quad (10.1.2)$$

ni olamiz. Qavslar ichidagi ifoda chekli limiti mavjudligidan chegaralangandir.

Demak, (10.1.2) ning o‘ng tomonidagi ifoda chegaralangan miqdorning Δx -cheksiz kichikka ko‘paytmasi sifatida cheksiz kichik miqdordir. Shunday qilib, argumentning cheksiz kichik Δx orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik Δy orttirmasi mos kelganligi sababli funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Yuqorida yozilgan (10.1.2) formula *differensiallanuvchi funksiyaning orttirmasi formulasi* deb ham yuritiladi.

Bu o‘rinda shuni ham aytish lozimki, yuqorida isbotlangan tasdiqning teskarisi hamma vaqt ham o‘rinli bo‘lavermaydi, ya’ni funksiyaning uzluksiz ekanligidan uning differensiallanuvchi ekanligi hamma vaqt ham kelib chiqavermaydi. Bunga misol sifatida, $y = |x|$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada qarasak, u uzluksizdir. Endi uning hosilasini tekshirib ko‘raylik.

$$\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

Oxirgilardan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - mavjud emasligi, ya'ni qaralayotgan funksiyaning $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emasligi kelib chiqadi.

10.2. Differensiallashning asosiy qoidalar

Bu bandda funksiyaning differensiallashda qo'llaniladigan asosiy qoidalarini keltiramiz.

1. O'zgarmasni differensiallash. $y=c$, bu yerda c - o'zgarmas.

$$\Delta y = 0 \text{ ekanligidan } y' = 0, \text{ ya'ni } c' = 0$$

kelib chiqadi. Demak, o'zgarmasning hosilasi nolga teng ekan.

2. Yigindini differensiallash. Agar u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, ularning algebraik yig'indisi ham differensiallanuvchi va

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

o'rinlidir.

Haqiqatdan ham, $\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$ ekanligidan yuqoridagini keltirib chiqarish qiyin emas.

3. Ko'paytmani differensiallash. Agar u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa,

$$(uv)' = u'v + uv'$$

o'rinlidir.

Haqiqatdan ham, $\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v \Delta u + u \Delta v + \Delta u \Delta v$ va differensiallanuvchi funksiyaning uzluksiz ekanligini hisobga olib,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) = u'v + uv' + u' \cdot 0 = u'v + uv'$$

ni olamiz.

4. O'zgarmas ko'paytuvchili ko'paytmani differensiallash. Agar u differensiallanuvchi funksiya bo'lib, c o'zgarmas bo'lsa,

$$(cu)' = cu'$$

o'rinlidir, ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin.

Buni ko'rsatishni o'quvchining o'ziga qoldiramiz.

5. Bo'linmani differensiallash. Agar u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo'lib, $v \neq 0$ bo'lsa,

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

o'rinlidir.

Haqiqatdan ham,

$$\Delta \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{u}{g}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g \cdot (g + \Delta g)} = \frac{g \cdot u' - u \cdot g'}{g(g+0)} = \frac{u'g - ug'}{g^2}.$$

6. Teskari funksiyaning hosilasi. Agar $y=f(x)$ funksiya monoton va differensiallanuvchi bo'lib, $y' \neq 0$ bo'lsa, unga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo'lib, u ham differensiallanuvchi va

$$y' = \frac{1}{x'} \left(x' = \frac{1}{y'} \right)$$

o'rinlidir, ya'ni teskari funksiyaning hosilasi funksiya hosilasining teskari qiymatiga tengdir.

Bu
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

tenglikdan kelib chiqadi (bunda monoton va uzluksiz funksiya uchun $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$, $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$ bo'lishini eslash kerak bo'ladi).

7. Murakkab funksiyaning hosilasi. Agar $z=\varphi(x)$ biror $D(z)$ oraliqda, $y=f(z)$ esa biror $D_0(z)$ oraliqda aniqlangan funksiyalar bo'lib, $\forall x \in D(z) \Rightarrow \varphi(x) \in D_0(z)$ hamda $\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $f(z)$ esa $z_0=\varphi(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, $y=f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va

$$u' = f'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0)$$

o'rinli bo'ladi.

Buni ko'rsatish uchun differensiallanuvchi funksiya orttirmasi formulasidan foydalanamiz:

$$\Delta z = (\varphi'(x_0) + \alpha) \Delta x; \quad \Delta y = (f'(z_0) + \beta) \Delta z$$

Bu yerda, α va β lar $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta z \rightarrow 0$ da cheksiz kichik miqdorlardir. Shuni aytish kerakki, $\Delta x \neq 0$ dan $\Delta z \neq 0$ ekanligi kelib chiqmaydi, ammo $\Delta z = 0$ bo'lgan holda $\beta = 0$ deb qabul qilish hech qanday qarama-qarshilikka olib kelmaydi.

Buni hisobga olgan holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (f'(z_0) + \beta) \cdot (\varphi'(x_0) + \alpha)$$

munosabatda $\Delta x \rightarrow 0$ limitga o'tish bilan yuqoridagi formulani keltirib chiqaramiz.

Murakkab funksiya hosilasining formulasini ixtiyoriy x uchun

$$y' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

yoki

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

ko'rinishlarda yoziladi.

8. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi. Agar $y=f(x)$ funksiya

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in T$$

parametrik tenglamalari bilan berilgan bo'lib, $t=t_0$ da $\varphi'(t_0)$ va $\psi'(t_0)$ chekli hosilalar mavjud va $\psi'(t_0) \neq 0$ bo'lsa,

$$y' = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

o‘rinli bo‘ladi.

Buni
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

tenglikdan foydalanib osongina olish mumkin.

Parametrik tenglamalari bilan berilgan funksiya hosilasi formulasini

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

ko‘rinishlarda ham yoziladi.

9.Oshkormas funksiyaning differentsiallashtirish. Agar $y = f(x)$ funksiya biror D sohada aniqlangan bo‘lsa, uni $y-f(x)=0$ ikki o‘zgaruvchili tenglama ko‘rinishida yozish mumkinligi ayondir.

Endi, agar

$$\varphi(x; y)=0 \quad (10.2.1)$$

ikki o‘zgaruvchili tenglama berilgan bo‘lib, uni y ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya kelamiz. Bu holda, (10.2.1.) ni oshkormas funksiyaning tenglamasi deyilib, y oshkormas funksiya x esa uning argumentidir. Agar $\varphi(x; y)$ funksiya $y=f(x)$ deb faraz qilinsa, y murakkab funksiya (10.2.1) esa ayniyat bo‘lib qoladi. Buni e‘tiborga olgan holda (10.2.1) ning har ikki tomonini differentsiallashtirish natijasida y' hosilaga nisbatan tenglama olamiz va undan y' ni topamiz, bu yerda (10.2.1) tenglama o‘rinli bo‘lishini yoddan chiqarmaslik lozim.

Masalan, $x^2+y^2-a^2=0$ tenglamada x argument y esa funksiya deb qarasak, bu oshkormas funksiya tenglamasidir. Uni differentsiallashtirib, $2x+2yy'=0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$ ni olamiz.

Eslatma. Differentsiallashtirishning asosiy qoidalarida funksiya uchun qo‘yilgan shartlar yetarli shartlar bo‘lib, ularning ba‘zilari zaruriy shart bo‘lolmaydi. Masalan, Dirixle funksiyasi $\chi(x)$ (8.4-band) va unga o‘xshab ketadigan 9.4-bandda kiritilgan $\overline{\chi}(x)$ funksiyalarni qarasak, ular birorta nuqtada ham differentsiallanuvchi bo‘lmagan funksiyalardir. Ammo, ular vositasida olingan

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \chi(x) + \overline{\chi}(x) = 1, & f_2(x) &= \chi(x) \cdot \overline{\chi}(x) = 0, \\ f_3(x) &= \chi[\overline{\chi}(x)] = 1, & f_4(x) &= \overline{\chi}[\chi(x)] = 0. \end{aligned}$$